

Chapitre 6 Séries numériques

Exercice 1 : Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$(i) \sum \frac{1}{n(n+1)}, \quad (ii) \sum \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$(iii) \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad (iv) \sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $S(x)$ la série $\sum kx^k$.

1. Est ce que la série $S(x)$ est convergente pour $|x| \geq 1$?
2. En calculant la dérivée de la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ de deux façons, déterminer une expression de la somme $\sum_{k=0}^n kx^k$ pour $|x| < 1$.
3. En déduire que la série $S(x)$ est convergente si $|x| < 1$ et donner sa somme.

Exercice 3 : On admet que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Montrer la convergence des sommes suivantes et calculer leur somme.

$$(i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}, \quad (iii) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 4 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries

$$(i) \sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}, \quad (ii) \sum \frac{n!}{n^{an}}.$$

Exercice 5 : Étudier la convergence de la série de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin(t)}{1+t} dt.$$

Exercice 6 : Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i) \frac{2n-1}{n^3+1}, \quad (ii) \frac{\sin(n) + (-1)^n}{2^n}, \quad (iii) n \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(iv) \frac{n^2}{(-4)^n}, \quad (v) \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad (vi) e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$(vii) ne^{-\sqrt{n}}, \quad (viii) n \cos(n) \sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right), \quad (ix) 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$(x) \frac{n!}{n^n}, \quad (xi) \frac{\ln(n)^2}{n^3+1}, \quad (xii) n^n e^{-n^2},$$

$$(xiii) 2^n n, \quad (xiv) \frac{1}{n} \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right), \quad (xv) n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$$(xvi) \frac{\ln^2(n)}{n}, \quad (xvii) \frac{1! + \dots + n!}{(n+2)!}, \quad (xviii) \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{n^n}.$$

Exercice 7 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

1. Pour quelle valeur de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Dans ce cas, calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 8 : Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général (u_n) défini ci-dessous converge-t-elle ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}.$$

Exercice 9 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont convergentes.

$$(i) \sum \max(u_n, v_n), \quad (ii) \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad (iii) \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 10 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0 et étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 11 : Soit (u_n) une suite de réels positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 12 : Soit (u_n) une suite de réels positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2}.$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2. Étudier la réciproque.
3. On suppose que (u_n) est majorée. Montrer la réciproque.

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En utilisant une comparaison série - intégrale, étudier la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)}, \quad \sum \frac{1}{n \ln^a(n)}, \quad \sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}.$$

Exercice 14 : En utilisant une comparaison série - intégrale, déterminer un équivalent des suites suivantes.

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (iii) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad (iv) \ln(n!),$$

$$(v) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad (vi) \sum_{k=1}^n \ln^2 k, \quad (vii) \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}, \quad (viii) \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}.$$

Exercice 15 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.
2. Encadrer $S(a)$ avec des intégrales pour $a > 0$.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$.

Exercice 16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < a < b$. Déterminer la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=an}^{bn} \frac{1}{k}.$$